

实验指导：桥梁分析

教学目的和要求：

通过桥梁分析问题，使学生：

1. 了解线性代数在土木工程中的应用；
2. 了解如何通过做一些使问题简化的假设，建立实际问题的数学模型；
3. 体会学好线性代数知识的重要性；
4. 激发学习线性代数的兴趣。

知识点：

线性方程组 向量分解

必备技能：

1. 力的平衡分析；
2. 向量分解；
3. 求解线性方程组。

主要内容

1. 应用场景
2. 问题分析
3. 建立数学模型
4. 实验任务

1. 应用场景

解方程组在许多领域都有应用。下面给出一个在土木工程中的应用例子，虽然加入了一些幽默元素，但类似的情形土木工程师会经常遇到。

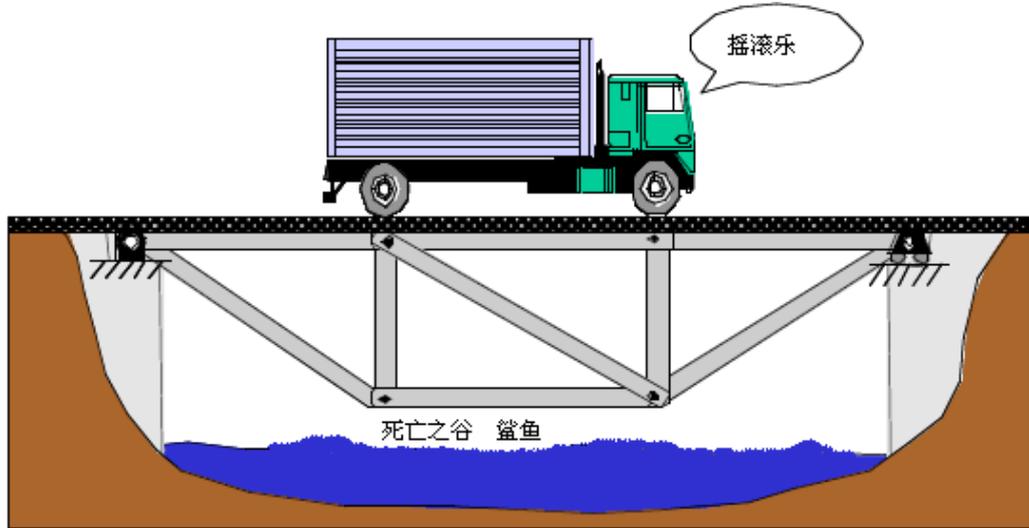


图 1：一个危险的情况

一位货运司机正驾着卡车为一个数学家聚会运送物资，但他的卡车超载了。途中，他遇到了一个古老的桁架桥。这座桥没有标明最大承重载荷。由于注意到桥下水中有鲨鱼，他想知道自己那超重的卡车能否安全过桥，这辆卡车大约重 10 吨（20,000 磅）。他拿出手机给你打电话，请你帮忙分析，并给出建议。图 1 中卡车正处于使桁架结构内力和压力最大的位置。

2. 问题分析

桁架结构很坚固，是由销连接的三角形构成的。因此，桁架结构不会弯曲（变成一个微笑的或者皱眉的形状），但是可以拉伸或压扁。

两个相同的桁架对称地支撑着桥面，桥的两侧各一个（在图 1 中，看不见第二个桁架，它在第一个后面）。每个桁架结构承载卡车重量的一半。卡车和货物总重是 20,000 磅，因此每个桁架结构承重 10,000 磅。假设卡车前面比较重，前轮承受 5720 磅的重量，后轮承受 4280 磅，如图 2 所示。在铰链 A 处，桥被固定，当有人刹车时它不会掉进沟里。在铰链 D 处，桥可以自由的滑动这样在热天它可以膨胀。

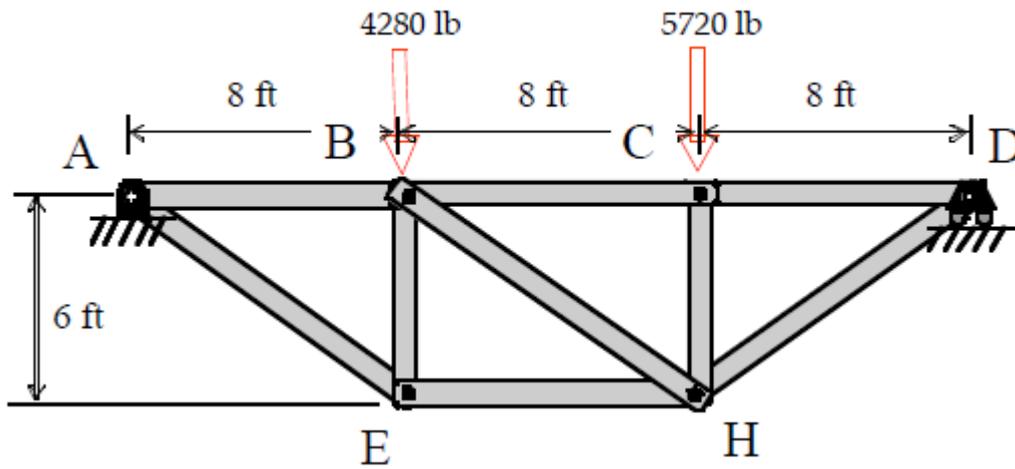


图2: 六丁一物木的小总图

3. 建立数学模型

为了判断该桥是否会断裂，可以用节点法。假设，当桥中桁架的任何组件断裂时，整座桥就会断裂。节点法是分析桁架每个节点的平衡条件。节点平衡要求该点所受到的所有内力和外力相互平衡，否则，桁架将会移动。

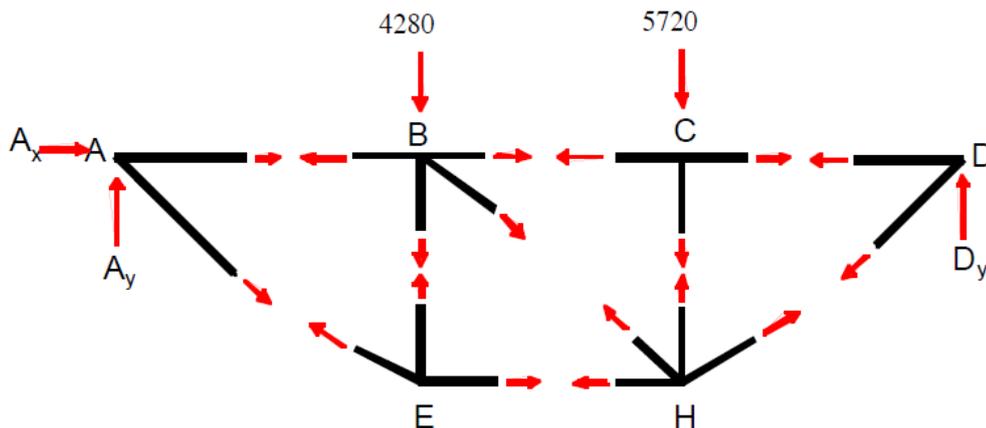


图3: 节点法的应用

如图3所示，有三个未知的外力 A_x 、 A_y 和 D_y ，作用在桁架与地面接触的节点上。这三个外力与4280磅和5270磅的负载共同作用导致桁架组件的内力。桁架每个组件的内力可以通过对每个节点运用节点法来确定。图3是节点法在每个节点应用的示意图。注意各组件已经被“割断”，假设内力方向如箭头所示。被“割断”的组件的所有力都按张力来标示，所谓张力就是作用在桁架组件的拉力。

为了把卡车的重量从桥的中间转化为桥两端的支撑力，一些组件一定会被压缩，另一些一定会被拉伸。所以如果最终得出的力为负，则说明假设为张力是错误的，该力实际上应该是压力。在图3中具有负值的力的箭头应向内。

为了使桁架满足平衡条件，在每一节点处， x 轴方向和 y 轴方向的合力应分别为0。对应

的数学表达式为 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 。大小为4280 lb的力作用在B点和大小为5720 lb

的力作用在C点说明，卡车重量直接作用在节点处。让我们来看一下如何根据节点法分析任一节点处的受力情况

节点A

每个桁架用桁架两端节点处的字母表示，如图3，对支点A有四个力的作用 A_x ， A_y ，

F_{AB} ， 和 F_{AE} ：

- A_x 表示作用在A点作用在x轴方向上的力， F_{AB} 表示从A点指向B点的力。
- F_{AE} 表示力的方向为从A指向E。

注意 $F_{AE} = F_{EA}$ ， 当分析A点时， 将力分解在X和Y方向上。

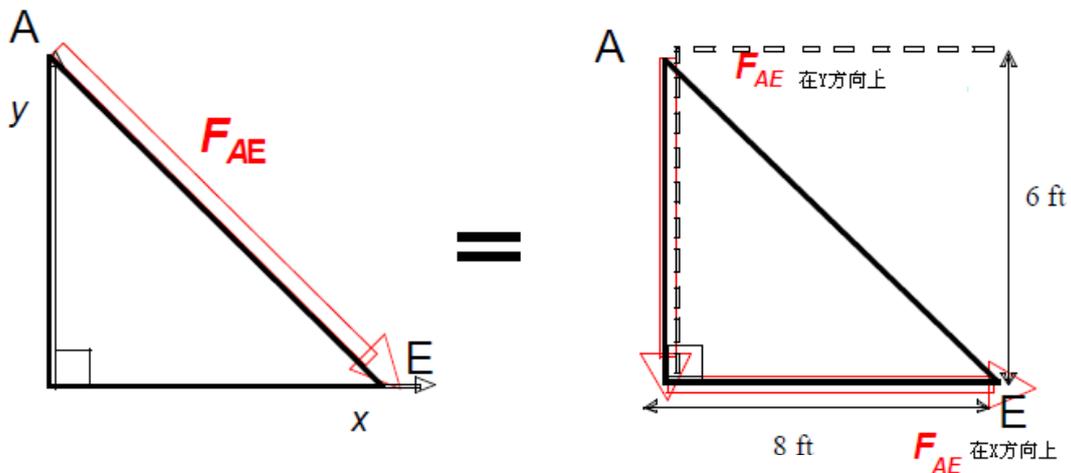


图 4：把 F_{AE} 看作直角三角形斜边

图4是对力 F_{AE} 的分析，演示了如何对力进行分解。在 F_{AE} 在Y方向上的分力：

$$y = \frac{6}{10} F_{AE}$$

F_{AE} 在X轴方向的分力大小：

$$x = \frac{8}{10} F_{AE}$$

为了使A点保持平衡状态，该点处X轴方向和Y轴方向的合力分别为0。A点处Y轴方向的合力：

$$A_y - \frac{6}{10} F_{AE} = 0$$

接着你需要求出A点处X轴方向的合力。然后，通过在每一个支点处重复这样的过程，你可以建立一个方程组以求得各个桁架组件间未知的力。这个方程组有唯一解（因为未知数的个数和方程的个数相同）。

4. 任务

- 1) 确定作用在桁架上的所有的内力和外力。
- 2) 为了评估桁架的安全性，你需要确定桁架的每个组件最多能承受多大的力而不毁坏。一位土木工程专业的学长通过快速计算，报告说每根杆能承受9000磅的拉力和6500磅的压力，问卡车是否能安全通过该桥梁。
- 3) 对于你的分析和得出的结论写一份技术报告。
- 4) 你还可以做一些其他探讨，进行拓展。